Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-2**
Area de Ciencias Básicas y Humanidades **30-12-2006**

Solucionario del Examen Sustitutorio de Cálculo Numérico (MB535)

Sólo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

Dos péndulos simples idénticos oscilan en el plano según como se muestra en la Figura 1. Ambos péndulos consisten de barras ligeras de longitud = 10 y se suspende del mismo techo a una distancia L = 15 de separación, con masa, m = 1 unidos a sus extremos. Los ángulos que el péndulo hace con la vertical hacia abajo son el θ_1 y θ_2, y se juntan a través del resorte con coeficiente k = 1. El resorte sin estirar tiene una longitud L = 15. Puede también asumir que la aceleración debido a la gravedad es g = 10.

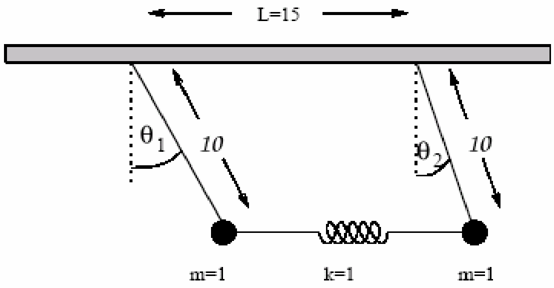

Figura 1

a) Asumiendo que las oscilaciones del resorte son pequeñas en amplitud, de tal forma que $|\theta_1| << 1$ y $|\theta_2| << 1$, por la segunda ley de Newton y la ley de Hooke, demuestre que el sistema del péndulo se puede colocar en un sistema de ecuaciones diferenciales y

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = A\theta \qquad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \ldots.(1)$$

b) Por inspección de la solución que tiene la forma $\theta(t) = Ce^{iwt}$ para un vector constante C, muestre que el sistema de ecuaciones diferenciales (1) se reduce a resolver el problema de valores propios $(A + \omega^2 I)C = 0$.

c) Encuentre el valor propio dominante y el vector propio asociado usando el método de la potencia con $C^{(0)} = [2 \quad 0]^t$. Realice 05 iteraciones.

d) Encuentre en forma analítica la frecuencias naturales?. Comente la respuesta c) con respecto a su resultado.

Solución

a)
$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta_1 - k_1(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta_2 - k_1(\theta_2 - \theta_1)$$

b) reemplazando $\Theta = Ce^{i\omega t}$ en (1) queda: $C(i\omega^2)e^{i\omega t} = AC\, e^{i\omega t}$
ordenando $(A + \omega^2 I)C = 0$

c)

It	0	1	2	3	4	5
	1 0	1 -0.5	1 -0.8	1 -0.92857	1 -0.97561	1 -0.99180
U		**-1.5**	**-2.5**	**-2.8**	**-2.92857**	**-2.97561**
e	100	44.72	23.43	9.4	3.37	1.15

d) $|A - \lambda I| = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ $\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = -1$ $\omega^2 = -\lambda$

$\omega_1 = 1.73$ $\omega_2 = 1$

Problema 2

El perfil de composición de un gas difundiéndose de forma no estacionaria a través de un sólido con flujo constante en la superficie, es el siguiente:

$$C(z,t) = \frac{k}{D_e}\left\{2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.5}\exp\left(\frac{-z^2}{4D_e t}\right) - \left(\frac{z}{D_e}\right) erfc\left[\frac{z}{2(D_e t)^{0.5}}\right]\right\}$$

donde *k* es el flujo constante en la superficie, D_e es la difusividad efectiva del gas en el sólido, *t* es el tiempo de resistencia, *z* es la distancia desde la superficie y **erfc** es la función error complementaria:

$$erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-\eta^2)\,d\eta$$

Después de 10 segundos de haber sido establecido el flujo constante *k* =1 mol $m^{-2}s^{-1}$ se midió en un determinado punto del sólido una concentración de 5.4 mol m^{-3}. Siendo $D_e = 2.14 \times 10^{-4}\, m^2 s^{-1}$.

Tome $z_0 = 0.0008$ y realice 02 iteraciones utilizando el método de Newton-Raphson para aproximar el punto *z* en que se midió la concentración.

Nota: Para $\int_0^x \exp(-\eta^2)\,d\eta$, utilice el método de Simpson 1/3 usando N=2 (intervalos) para su aproximación

Solución

$$\text{t} = 10;\ \text{k} = 1;\ \text{De} = 2.14\text{e-4};\ \text{A} = 5.4;$$

$$\text{arg1} = z/(2*\sqrt{De*t})$$

$$\text{arg}\,2 = -(z^2)/(4*De*t)$$

$$der\_\text{arg}\,2 = -2*z/(4*De*t)$$

$$\text{f(x)} = \exp(\text{-x}^2)$$

$$\text{simpson(f, 0, arg1)} = (1/6)*(\text{arg1})*(\text{f}(0)+4*\text{f(arg1/2)}+\text{f(arg1)})$$

$$Integ\_erfc = 1-(2/\sqrt{pi})*\text{simpson(f, 0, arg1)}$$

$$y = (k/De)*(2*\sqrt{t/\pi}*\exp(\text{arg}\,2)-(z/De)*Integ\_erf)$$

$$F(z) = y - A$$

$$F'(z) = y' = (k/De)*(2*\sqrt{t/\pi}*\exp(\text{arg}\,2)*der\_\text{arg}\,2-(1/De)*Integ\_erf$$

$$-(z/De)*(2/\sqrt{\pi})*\exp(-\text{arg1}^2)))$$

Aplicando Newton

Iteración	z
0	0.0008
1	0.000770535
2	0.000770546

Problema 3

Dada la Figura 2, se toma 5 puntos (α,h) igualmente espaciados por α, en el intervalo [0, 5] rad, y sea $p(\alpha) = -0.1073 + 1.912\alpha + 1.4201\alpha^2 - 0.331824\alpha^3$ el polinomio que ajusta a dichos puntos. Se pide:

a) Aproximar la $\int_0^5 h(\alpha)d\alpha$, usando p(x) por el método de Simpson 3/8 usando 3 intervalos.

b) Aproximar la $\int_0^5 h(\alpha)d\alpha$, usando p(x) considerando la cuadratura de Gauss-Legendre, n=4

c) Calcular el error absoluto real cometido en a y b.

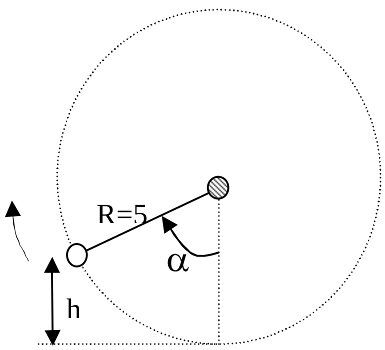

Figura 2

Solución:

a) Aplicando :

$$\boxed{\int_0^5 p(\alpha)d\alpha = \frac{3h}{8}\left(p(0)+3p(5/3)+3p(10/3)+p(5)\right) = 30.67888807390741 \qquad h = 5/3}$$

b) Aplicando:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)x+(b+a)}{2}\right)dx = \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + E$$

Para n=4
Y haciendo el cambio de variable respectivo se tiene:
Integral=30.67888807390743

c) El error será:
h(α)=5*(1-cos(α))

$\int_0^5 h(\alpha)d\alpha$ =5*x-5*sin(x) $\Big|_0^5$ = 29.79462137331569

E=0.884266
Es igual en b y c

Problema 4

Sea el siguiente problema de valor frontera:

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$$
$$y'(1) = 2e \quad y'(2) = 10e^2$$

a) Obtener y(x) para x=1, 4/3, 5/3, 2 usando cualquier método desarrollado en clase.
b) Si la solución exacta es $y(x) = 2x^2 e^x - 2xe^x$, encuentre el error para cada punto. ¿Qué opinión merece los resultados obtenidos en a)?
c) Mencione alguna sugerencia para obtener un mejor resultado.

Solución

a) Discretizando el dominio:

x_0=1	x_1=4/3	x_2=5/3	x_3=2
y(1)=y_0=??	y(4/3)=y_1=??	y(5/3)=y_2=??	y(2)=y_3=??

Sea la ecuación diferencial:

$$x_i^2 y_i'' - 3x_i y_i' + 3y_i = 2x_i^4 e^{x_i}$$

Aplicando formulas de diferenciación numérica para i=0, 1, 2 y 3.

$$x_i^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i - y_{i-1}}{h^2} - 3x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 3y_i = 2x_i^4 e^{x_i}$$

Aplicando las condiciones de frontera (usando nodos ficticios):

$$y_0' = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 2e \qquad y_3' = \frac{y_4 - y_2}{2h} = 10e^2$$

Resolviendo:

$x_0=1$	$x_1=4/3$	$x_2=5/3$	$x_3=2$
$y(1)=y_0=1.2862$	$y(4/3)=y_1=4.0922$	$y(5/3)=y_2=11.4356$	$y(2)=y_3=27.7817$

b)

x_i	$x_0=1$	$x_1=4/3$	$x_2=5/3$	$x_3=2$
Finitas	$y_0=1.2862$	$y_1=4.0922$	$y_2=11.4356$	$y_3=27.7817$
Exacta	$Y_0=0$	$Y_1=3.3721$	$Y_2=11.7655$	$Y_3=29.5562$
Error	$e_0=1.2862$	$e_1=0.7201$	$e_2=0.3299$	$e_3=1.7748$

Las aproximaciones resultan ser imprecisas.

c) Se obtendría una mejor precisión usando valores de h más pequeños o usando el método del disparo con Runge-Kutta de orden 4.

Los Profesores